散在型単純群の根基部分群 (有限群のコホモロジー論の研究)

吉荒, 聡

数理解析研究所講究録
1140 巻 2000 年 25-38

散在型単純群の根基部分群

吉荒 聡 (Satoshi Yoshiara)
大阪教育大学 教育学部
教養学科 数理科学講座

1 概要

このノートは短期共同研究「有限群のコホモロジー論」において行われた筆者の講演「散在型単純群の根基部分群」(京大数理研・１９９９年８月２４日午前９時４０分から１０時４０分)の忠実な再現を試みたものです。多少書き足した部分もあります。

講演を依頼された当初はもう少しコホモロジーに関連した話題を提供する予定でしたが、夏休み中に有限体の整数論に関係した話に深入りしてしまい未だ抜け出せず、コホモロジー関係の仕事には手が付けられませんでした。そこで、今年の２月から５月にかけて筆者が千葉大の北詰正顕氏、熊本大の澤邊正人氏(現在 University of Illinois at Chicago に滞在中)との協力の元に行った散在型有限単純群の根基部分群の分類についてお話します。

結果を言いますと、26 個の散在型単純群の中、コンウェイ群 $Co1$ の $p=2,3$ 及びラドバリス群 Rud の $p=2$ に対する根基 p-部分群の分類が澤邊氏によって、フィッシャー群 Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24} の $p=2,3$ に対する根基 p-部分群の分類が私と北詰氏の共同研究により、原田群 HN の $p=2$ を除く(厳密に言うとモンスター・ベイビーモンスターの $p=2$ についても証明で使っている事実のすべてに証明が公刊されていないと言う意味で除けば)その他の散在型の単純群とその他の素数に対する根基部分群の分類が私により得られています。

この話題は先月北海道大学で行われた研究集会「Infinite-dimensional Lie Algebras, Monster and Related Topics」中の私の講演と内容的には同一ですが、有限群論的手段の解説を主とし、北大での講演において例として取り上げたモンスター $\mathbf{M}$ のかわりに J_4 (ジャンコー群)という単純群を例に取って解説します。

2 根基部分群–定義と実例

始めに記号の説明をします。

一般に有限群 G と素数 p に対し、G の部分群で位数が p のべきであるものを p-部分群と呼びました。 P, Q が G 中正規な p-部分群であればその積 PQ も G 中正規な p-部分群なので、 G の正規な p-部分群中に最大なものがあることがわかります。それを $O_p(G)$ と書きます。

また、群 G の部分群 H が p-**局所部分群** (local subgroup) であるとは、H が、ある自明で

ない p-部分群 $P \neq 1$ の正規化群 $N_G(P)$ の形をしていることを意味します。

$$H = N_G(P) = \{g \in G \mid g^{-1}Pg = P\}$$

上の記号を使えば、これは $O_p(H) \neq 1$ と言う条件と同値です。群 G の中の p-局所部分群の全体を考え、その中で包含関係に関して極大なものを**極大 p-局所部分群** (maximal p-local subgroup) と言います。極大 p-局所部分群を含む p-局所部分群ではないような部分群が存在する可能性はあるので、極大 p-局所部分群は必ずしも極大部分群とは限りません。

さて表題に言う**根基部分群**ですが、厳密には各素数 p に対して定義されるので、**p-根基部分群** (radical p-subgroup) と称するべきもので、次の性質を満たすような自明でない p-部分群 R として定義されます。

$$O_p(N_G(R)) = R$$

ここで R はその正規化群 $N_G(R)$ 中で正規ですから、いつでも $R \leq O_p(N_G(R))$ であることに注意します。根基部分群の条件はこの包含関係が等号であることを要求するものです。

この性質は Lie 型の有限群のユニポテント根基 (unipotent radical–parabolic subgroup の O_p) の持つ性質を取り出したもので、実は次の事実が示せます。

定理 1 *(Borel-Tits) G を標数 p の有限体上定義された Lie 型の有限単純群とするとき、G の根基 p-部分群はユニポテント根基に限る。*

この証明には代数群に対する知識が必要ですが、古典群についてはその自然な表現を考えることにより次のようにたやすく示すことが出来ます。これと同様な方法が例外群とその minimal weight module についても適用できないかどうか考えるのは意味があると思われます。

例　$q = p^e$ を素数 p のべきとするとき、$GL_n(q)$ の根基 p-部分群は $n = n_1 + \cdots + n_k$ をみたす適当な $(n_1, \ldots, n_k)$ に対する次の形の部分群に共役である。

$$\left\{ \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ U_{n_2,n_1} & I_{n_2} & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ U_{n_k,n_1} & U_{n_k,n_2} & \ldots & I_{n_k} \end{pmatrix} \mid U_{n_i,n_j} \in M_{n_i,n_j}(q)(1 \leq j < i \leq k) \right\}$$

ここで I_{n_i} は次数 n_i の単位行列、U_{n_i,n_j} は $q^{n_i n_j}$ 個の $M_{n_i,n_j}(q)$ の行列すべてを動きます。

証明　R を $GL_n(q)$ の根基 p-部分群とします。行ベクトル空間 $V := GF(q)^n$ への右からの積による $G := GL_n(q)$ の作用を考え、その半直積 $V : G$ を作ると、その部分群 $V : R$ は V を正規部分群とする p-部分群なので $V \cap Z(V : R) = C_V(R) \neq 1$ です。そこで $C_V(R)$ の基

底を適当に選び、その基底に関して $GL_n(q)$ の元を表現すると（R の適当な共役を取ると）、R の行列は次の形になることがわかります。

$$\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

この議論を商ベクトル空間 $V/C_V(R)$ 上への R の作用に関して行い、同様に繰り返していくと、V の部分空間列 $V_1 = C_V(R) \leq V_2 \leq \cdots V_k = V$ ですべての $i = 1, \ldots, k$ に対して V_i/V_{i-1} 上に R が自明に作用するようなものが取れます（ただし $V_0 = \{0\}$ とする)。この部分空間列の基底を選んで R を表現すると、根基部分群 R の共役は、$n_i = \dim(V_i/V_{i-1})$ $(i = 1, \ldots, k)$ に関する命題の形の部分群（仮に U とします）に含まれることがわかります。

V の第一段の分解 $C_V(R), V/C_V(R)$ は R のみにより定まるので $N_G(R)$ により不変です。そこでこれを繰り返して得られる上の分解も $N_G(R)$ で不変です。そこで $N_G(R)$ は上の行列群 U において対角成分に正則行列が現れるような行列群となり、特に U を正規化します。また U の形を見ると、U の行列の各 V_i への作用（行ブロック $U_{i1}U_{i2}\cdots I_i$ に対応）は互いに可換ですから、U は R を正規化しています。従って、U は $N_G(R)$ の正規な p-部分群となり、$R \leq U \leq O_p(N_G(R))$ となりますが、R が根基部分群なので等号が成立し、 $R = U$ が得られます。 □

上の結果は定義体の標数と一致するような素数 p に対する結果でしたが、そうでない場合には p-部分群は半単純となり、議論はかなり違ってきます。$GL_n(q)$ の場合には S_n の根基 p-部分群と密接な関連があり、p にさほど依存せず、ある意味では易しくなります。[AF] を参考にして下さい。また古典群についてもほぼ同様に扱えます。[An] の文献中の論文等を参考にして下さい。ここでも例外群でランクの大きいものがまだ残っているようです。

以下、主として単純群を扱うので $O_p(G) = 1$ としておきます。また、有限群 G の根基 p-部分群の全体を $\mathcal{B}_p(G)$ と書きます。実は根基部分群の重要性は次の事実に由来し、この事実から有限群のコホモロジーとの関連も生まれるのですが、この話題に関しては過去何度も説明していますので、今回は省略します。

定理 2 *(Quillen, Thévenaz, Webb)* 一般に有限群 G の自明でない p-部分群全体が包含関係に関してなす半順序集合 $\mathcal{S}_p(G)$ の全順序部分列を単体とするような単体複体 $\Delta(\mathcal{S}_p(G))$ の幾何学的実現は、半順序部分集合 $\mathcal{B}_p(G)$ に対応する同様の単体複体 $\Delta(\mathcal{B}_p(G))$ の幾何学的実現とホモトピー同値である。しかもこの同値は群 G の作用と両立する。

3 分類の原理と方針

散在型単純群の根基部分群の分類について説明します。次の非常に簡単な観察 [SY] は、分類を帰納的に行えることを示します。

補題 3 有限群 G の根基 p-部分群 R の正規化群 $N_G(R)$ を含む部分群 M をとる。$N_G(R) \leq M$. すると

(1) $O_p(M) \leq R$.

(2) もし $O_p(M)$ が R の真部分群ならば、剰余群 $R/O_p(M)$ は $M/O_p(M)$ の根基 p-部分群である。

証明 (1) $N_G(R)$ は部分群 M に含まれるので、M の正規部分群 $O_p(M)$ を正規化します。また当然 R を正規化するので、$N_G(R)$ は $RO_p(M)$ を正規化し、$RO_p(M) \cap N_G(R)$ は $N_G(R)$ の正規 p-部分群です。そこで

$$R \leq RO_p(M) \cap N_G(R) \leq O_p(N_G(R))$$

ですが R は根基部分群なので $O_p(N_G(R)) = R$ となり、等号が成立します。すると p-部分群 $RO_p(M)$ における部分群 R の正規化群は R に一致することになりますが、べき零群の基本性質から、これは R が $RO_p(M)$ の真部分群では有り得ぬことを意味します。従って $R = RO_p(M)$ であり、$R \leq O_p(M)$ が得られます。

(2) 標準的な同型

$$N_{M/O_p(M)}(R/O_p(M)) = N_M(R)/O_p(M)$$

に注意します。仮定より $N_G(R) \leq M$ だから $N_G(R) = N_M(R)$ であり、従って

$$O_p(N_{M/O_p(M)}(R/O_p(M))) = O_p(N_G(R)/O_p(M)) = O_p(N_G(R))/O_p(M) = R/O_p(M)$$

となり $R/O_p(M)$ は剰余群 $M/O_p(M)$ の根基部分群です。 □

上の補題は G の根基部分群の候補はその部分群 M の剰余群 $M/O_p(M)$ の根基部分群の全逆像ないしは $O_p(M)$ そのものとして得られると言っているわけです。$M/O_p(M)$ が G よりも真に小さい群であるためには $O_p(M) \neq 1$ である必要があります。そこで最も適当な M としては $N_G(R)$ を含む極大 p-局所部分群が考えられます。従って、もし群 G の極大 p-局所部分群の完全なリストが出来ている（その共役類の完全代表系が求められている）ならば、上の補題は、G の根基 p-部分群の共役類の代表系の候補を求めるには、極大 p-局所部分群の共役類の各代表 M に対する $M/O_p(M)$ の根基部分群を帰納的に求めておき、その逆像ないしは $O_p(M)$ そのものを取れば十分であることを示しているわけです。

実際に、有限単純群の分類にめどがつき始めた８０年頃から多くの数学者によって散在型単純群の極大部分群の分類がなされてきました。私も鈴木群・O'Nan-Sims 群・Rudvalis 群等について、修士から博士課程の中途までこうした極大部分群の分類に精力を注いだ経験があります。この過程で、多くの群についてはその極大 p-局所部分群の分類も副産物として得られています。ただし Monster と Baby Monster の極大 2-局所部分群については、Atlas

[At] に載っているもので尽きていると言う情報が流布しているものの、その証明はまだ発表されていません。

幾つかの散在型単純群については極大 p-局所部分群のリストを求める必要がありますが、ともかく、このリストはすべての散在型単純群で手に入ります。そこで上の原理をこのリストに当てはめて、小さな散在型単純群及び Lie 型の群・交代群等に対する知識を動員して行けば、根基部分群の候補が得られるわけです。しかし、これらが実際に根基部分群であるのか、また共役関係をどの様に判定すべきなのか、という問題が残ります。この二つは、極大局所 p-部分群の代表をうまい順番で処理していくことと、幾つかの補題を適用することによって解決できます。

例えば、定義を振り返れば、極大 p-局所部分群 M に対する $O_p(M)$ は群 G の根基 p-部分群です。また、$M/O_p(M)$ の根基 p-部分群の逆像 R に対して、何らかの方法で $N_G(R) \leq M$ であることが示されれば（通常は R の中心を調べることで示せます）、定義を振り返れば R は確かに群 G の根基部分群になります。そこで方針としては、極大 p-局所部分群の代表 M にうまい順番を付けて、早い順番のもの M_1 から生じる大部分の候補 R について $N_G(R)$ の適当な共役が順番の後の別の極大 p-局所部分群の代表 M_2 に含まれるようにすることになります。このように順番の後の極大 p-局所部分群に帰着できない場合には、正規化群 $N_G(R)$ は M_1 に含まれているので（上で注意したように）確かに G の根基部分群となるわけです。

極大 p-局所部分群 M の共役類の代表を調べる順番の原則を説明する前に一つ注意しておきます。$O_p(M)$ の中心の位数 p の元で生成される部分群 $\Omega_1(Z(O_p(M)))$ は自明でない p-部分群でしかも基本可換群、つまり幾つかの位数 p の巡回群の直積です。しかもこの群は M 中で正規ですから、その正規化群 $N_G(\Omega_1(Z(O_p(M)))$ は M を含む p-局所部分群です。従って M の極大性からこれは M に一致します。すなわち 極大 p-局所部分群 M は基本可換群 $\Omega_1(Z(O_p(M))$ の正規化群となっているわけです。

また多くの場合、この基本可換群の位数 p の部分群は M の中で互いに共役になっています。一般に位数 p の部分群の G における共役類を、その中心化群の大きさが大きい方から順に $pA, pB, \ldots$ と呼ぶ習慣があります。

原則

(a) 小さい基本可換群 $\Omega_1(Z(O_p(M)))$ を生成する位数 p の部分群の共役類から始めて、この基本可換群が大きくなる共役類へ。

(b) 位数 p の群の共役類を固定したときには、基本可換群 $\Omega_1(Z(O_p(M)))$ の大きいものから小さいものへ。

このようにしていくと結局 $\Omega_1(Z(O_p(M)))$ が位数 p の部分群に行き着き、しかもこの場合には多くの候補が残りそうに思われ、それらが実際に群 G の根基部分群であることの検証が面倒でありそうな気がしますが、実はこうした検証はいっさい無用であることがわかります。

補題 4 $\Omega_1(Z(O_p(M)))$ が位数 p であるような極大 p-局所部分群 M に対し、$M/O_p(M)$ の根基部分群の $M/O_p(M)$-共役類の代表系の M における全逆像及び $O_p(M)$ は、中心が $\Omega_1(Z(O_p(M)))$ と共役であるような G の根基 p-部分群の G-共役類の完全代表系をなす。

また、この最後の場合に到達する手前で、$M/O_p(M)$ が幾つかの群の直積に分解するような極大 p-局所部分群 M から生ずる根基 p-部分群を調べる必要が生じますが、このとき次の補題は有効です。

補題 5 $\mathcal{B}_p(A \times B) = \{U \times V \neq O_p(A \times B) \mid U \in \mathcal{B}_p(A) \cup \{O_p(A)\}, V \in \mathcal{B}_p(B) \cup \{O_p(B)\}\}$

更に、単純群 G の (p べき位数の) 中心による中心拡大や自己同型による (指数が p べきの) 拡大における根基 p-部分群を扱うために多少の技術が必要となりますが、ここでは省略します。[Yo3, §1]

4 実例–ジャンコー群 J_4 の根基 2-部分群

4.1 準備

ジャンコーの最大の単純群 $G := J_4$ は、その極大 2-局所部分群の中にマシュー群 M_{24} や M_{22} (の 3 倍の非分裂中心拡大) が含まれており、ある意味では最大のフィッシャー群 Fi'_{24} とも良く似た構造をしていますが、面白いことにモンスターの中には登場しません。多分背景にはモンスターに対するムーンシャイン加群と同様に何らかの数学的構造が存在すると思われますが、今の所知られていません。この群の位数 2 の元の共役類は二つあり、慣例に従い $2A, 2B$ とあらわします。$2A$ 元 (共役類 $2A$ に属する元のことをこう呼びます) の中心化群の方は極大部分群、従って特に極大 2-局所部分群ですが、$2B$ 元の中心化群の方は極大部分群どころか極大 2-局所部分群ですらありません。(後の群 $2^{11} : M_{24}$ の共役に含まれてしまいます。) 極大 2-局所部分群の共役類の代表系は次の 4 つの部分群からなることが知られています。

$$\begin{aligned}
M_1 &:= C_G(2A) \cong 2_+^{1+12} : ((3 \cdot M_{22}).2) \\
M_2 &:= N_G(2A^3) \cong 2^{3+12}.(S_5 \times GL_3(2)) \\
M_3 &:= N_G(2^{11}) \cong 2^{11} : M_{24} \\
M_4 &:= N_G(2^{10}) \cong 2^{10} : GL_5(2)
\end{aligned}$$

ここでは極大 2-局所部分群の大体の構造が表されています。$C_G(\ )$ や $N_G(\ )$ の括弧中に現れている $2A, 2A^3, 2^{11}, 2^{10}$ という記号は、それぞれ、ある $2A$ 元、位数 2^3 のある基本可換部分群でその位数 2 の元はすべて $2A$ 元であるようなもの、ある位数 2^{11} および 2^{10} の基本可換部分群を意味しています。

また $X.Y$ 等とあるのは X と同型な正規部分群を持ち、その群による商群が Y と同型な群という意味です。$X:Y$ というのはこの拡大が分裂、すなわち Y と同型な部分群が存在することを示し、$X\cdot Y$ （中の点がセントラルドットであることに注意して下さい）はこの拡大が非分裂であることを示します。

S_5 は5次対称群を示し、$GL_3(2)$, $GL_5(2)$ は二元体上３次、５次の一般線形群です。マシュー群 M_{24} と M_{22} については詳しいことはいいませんが、性質の扱い易い、もはや飼い慣らされたと言って良い程の散在型単純群で、その根基部分群などもはっきり記述できます。

記号 2^{11}, 2^{10} はそれぞれ位数 2^{11}, 2^{10} の基本可換群を意味します。（数を表す記号と同じとはけしからんと思う人も多いようですが慣例化しています） 記号 2^{3+12} が示すのは、位数 2^{15} の群 P で、その中心 $Z(P)$ が位数 2^3 の基本可換群であり、それによる剰余群 $P/Z(P)$ が位数 2^{12} の基本可換群であるようなもののことです。また記号 2_+^{1+12} が表すのは、位数 2^{13} の群 S で、その中心 $Z(S)$ が位数 2 であり、それによる剰余群 $S/Z(S)$ が位数 2^{12} の基本可換群であるようなもののうち、位数 2^7 の基本可換部分群を含むものことです。（このような群を位数 2^{13} のプラスタイプのエクストラスペシアル 2-群 (extraspecial) といいます。）

$R_i := O_2(M_i)$ $(i=1,\ldots,4)$ とおきます。前節で注意したように、これらはすべて根基部分群です。また R_i の中心を $Z_i := Z(R_i)$ とおきます。$R_1 \cong 2_+^{1+12}$ はエクストラスペシアル群ですから Z_1 は位数 2 の群でその生成元は $2A$ 元です。$R_2 \cong 2^{3+12}$ については、その中心 Z_2 は位数 2^3 の基本可換 2-部分群です。ここに $M_2 = N_G(R_2) = N_G(Z_2)$ (M_2 の極大性に注意) が共役により作用しますが、基本可換群 2^3 の自己同型群 $Aut(2^3) \cong GL_3(2)$ を引き起こすことが確かめられます。従って、その作用の核 $C_G(Z_2)$ の構造は $C_G(Z_2) \trianglerighteq R_2$, $C_G(Z_2)/R_2 \cong S_5$ となります。$i=3,4$ については $R_i = Z_i$ は基本可換群です。この上への群 M_i の作用の核 $C_G(Z_i)$ は $R_i = Z_i$ と一致することが確かめられます。M_i/R_i の Z_i への作用については後でもう少し詳しく見ます。

さて前節の原則に基づけば、ジャンコー群 $G = J_4$ の場合には Z_3, Z_4 は共に $2A$ 元で生成される基本可換群なので、いきなり $2A$ 元で生成される基本可換群から取りかかることが出来ます。すると原則で述べた順番からすると、まず位数 2^{11} の基本可換群 R_3 の正規化群 M_3 から生ずる根基部分群を調べるべきですが、今の場合は、結果的に $R_4 \cong 2^{10}$ の正規化群 M_4 からアプローチした方が、ここから生じる根基部分群の数が少なく、後の処理がし易いことがわかります。そこで、まず $N_G(R) \le M_4$ を満たす根基部分群 R について考え、以下は原則に従って、

$$M_4 \to M_3 \to M_2 \to M_1$$

の順に考察することにします。M_i $(i=1,\ldots,4)$ は極大 2-局所部分群の共役類の代表元でしたから、どんな根基部分群 R についても、その共役を取れば $N_G(R)$ は M_1 から M_4 のどれかには含まれることに注意します。

4.2 根基 2-部分群の分類

以下 R は $G = J_4$ の根基 2-部分群とします。R をその適当な共役に取り替えれば、ある $i = 1, \ldots, 4$ に対して $N_G(R) \leq M_i$ です。

Step 1. $N_G(R) \leq M_4$ **のとき** 前節の補題 3 により $R = R_4$ であるか R/R_4 は $M_4/R_4 \cong GL_5(2)$ の根基 2-部分群となるかです。後の場合を考えます。$GL_5(2)$ は標数 2 の体上で定義された Lie 型の群ですから、その根基 2-部分群は完全にわかっています。この場合は Borel-Tits の結果を持ち出すまでもなく、始めの例で説明したように、R/R_4 は適当に共役を取れば、次の形の $2^4 - 1 = 15$ 個のユニポテント根基 U_F のいずれかになります。ユニポテント根基 U_F は、$GL_5(2)$ の自然表現 $V := GF(2)^5$（自然基底 $e_1, \ldots, e_5$）における部分空間の包含列

$$p := \langle e_1 \rangle \subset l := \langle e_1, e_2 \rangle \subset \pi := \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \subset h := \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$$

の部分列 F に対応しています。(p, l, π, h はそれぞれ射影点 (point)、射影直線 (line)、射影平面 (plane)、射影超平面 (hyperplane) の意です。) 記号の簡略化のため、例えば $F = \{p, l, h\}$ に対するユニポテント根基 U_F（すなわち部分空間列 $p \subset l \subset h \subset V$ を固定し、対応する商空間 $p, l/p, h/l, V/h$ のすべてに自明に作用するような $GL_5(2)$ の部分群）のことを U_{plh} 等と書きます。

$$U_p = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & I_4 \end{pmatrix}\right\},\ U_l = \left\{\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ * & I_3 \end{pmatrix}\right\},\ U_\pi = \left\{\begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ * & I_2 \end{pmatrix}\right\},\ U_h = \left\{\begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}\right\};$$

$$U_{pl} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & I_3 \end{pmatrix}\right\},\ U_{p\pi} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & I_2 & 0 \\ * & * & I_2 \end{pmatrix}\right\},\ U_{ph} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & I_3 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}\right\};$$

$$U_{l\pi} = \left\{\begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & I_2 \end{pmatrix}\right\},\ U_{lh} = \left\{\begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ * & I_2 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}\right\},\ U_{\pi h} = \left\{\begin{pmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}\right\};$$

$$U_{pl\pi} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & I_2 \end{pmatrix}\right\},\ U_{plh} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & I_2 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}\right\};$$

$$U_{p\pi h} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & I_2 & 0 & 0 \\ * & * & I_2 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}\right\},\ U_{l\pi h} = \left\{\begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix}\right\};$$

$U_{pl\pi h} =$ 下三角行列全体

さてこれら１５個の $GL_5(2) \cong M_4/R_4$ の根基 2-部分群の代表元 U_F に対して、その M_4 における全逆像を R_4^F と書くことにします: $R_4^F/R_4 = U_F$. 簡便のために $R_4 = R_4^\emptyset$ と約束すると、$N_G(R) \leq M_4$ を満たす G の根基 2-部分群 R について、その M_4 の元による適当な共役を取れば、ある $F \subseteq \{p, l, \pi, h\}$ について $R = R_4^F$ となることが結論されたわけです。逆に R_4^F たちは G の根基 2-部分群の候補です。以下 R_4^F たちの中心を調べ、多くの場合、

$N_G(R_4^F)$ の共役は、M_4 以外の極大 2-局所部分群 M_i $(i = 1, 2, 3)$ のどれかに含まれてしまうことを見ます。

そのため、 $M_4/R_4 \cong GL_5(2)$ の $R_4 \cong 2^{10}$ への共役による作用を見ます。次元を見ると、これは $GL_5(2)$ の（５次の）自然表現 $V = GF(2)^5$ の交代テンソル積 $W := \wedge^2(V)$ に同値であることがわかります。そこで R_4 の基底として V の自然基底 e_i $(i = 1, \ldots, 5)$ の交代テンソル達 $e_{ij} := e_i \wedge e_j$ $(1 \leq i < j \leq 5)$ を取ることが出来ます。この基底に関する $GL_5(2)$ の表現は

$$e_{ij}^g = e_i^g \wedge e_j^g$$

で与えられます。さて $C_G(R_4) = R_4$ ですから R_4^F の中心は R_4 に含まれ、

$$Z(R_4^F) = C_{R_4}(R_4^F/R_4) = C_{R_4}(U_F)$$

であることに注意します。すると $Z(R_4^F)$ は U_F の元（５次の行列としてはっきりわかっている）のすべてにより固定されるような交代テンソルの全体として計算できるわけです。

この計算を実行すると次の結果を得ます。

l を含むすべての F に対して $Z(R_4^F) = C_{R_4}(U_F) = \langle e_{12} \rangle$
$Z(R_4^h) = \langle e_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 4 \rangle \cong 2^6,$
$Z(R_4^p) = \langle e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15} \rangle \cong 2^4,$
$Z(R_4^\pi) = Z(R_4^{\pi h}) = \langle e_{12}, e_{13}, e_{23} \rangle \cong 2^3,$
$Z(R_4^{ph}) = \langle e_{12}, e_{13}, e_{14} \rangle \cong 2^3,$
$Z(R_4^{p\pi}) = Z(R_4^{p\pi h}) = \langle e_{12}, e_{13} \rangle \cong 2^2.$

$Z_4 \cong 2^{10}$ の位数２の元について調べると e_{12} は $2A$ 元であることがわかります。（この部分には部分群 Z_4 の構成に関するもう少し詳しい知識が必要です。）従って、F が l を含むときには $R = R_4^F$ の中心は $2A$ 元で生成される位数２の群なので、その正規化群 $N_G(R)$ は $2A$ 元の中心化群である M_1 の共役に含まれることになります。すなわち、このような形の F に対する $R = R_4^F$ は、$N_G(R) \leq M_1$ を満たす根基部分群の分類に帰着されてしまうわけで、これ以上考察する必要のないことになります。

他の中心については次の事実が確かめられます。実はこれらの事実の確認には R_3 と R_4 の関連をはっきり頭に入れる必要があり、どうしても元々のジャンコーの論文 [Ja] の細かい議論を引用することとなり、なかなか厄介です。

(1) $Z(R_4^\pi)$ は $Z(V_2)$ に共役であり、従って $R = Z(R_4^\pi)$ ならばその正規化群 $N_G(R)$ は M_2 の部分群に共役となる。

(2) $Z(R_4^{p\pi})$ は V_3 の部分群 (後の記号でいう $Z(R_3^{T\square})$) に共役であり、しかもその正規化群は M_2 の部分群に共役である。従って、$R = Z(R_4^{p\pi})$ ならば、その正規化群 $N_G(R)$ は M_2 の部分群に共役となる。

(3) $Z(R_4^{ph})$ は V_3 の部分群 (後の記号でいう $Z(R_3^{O\square})$) に共役であり、しかもその正規化群は M_3 の部分群に共役である。従って、$R = Z(R_4^{ph})$ ならば、その正規化群 $N_G(R)$ は M_3 の部分群に共役となる。

(4) $Z(R_4^h)$ は V_3 の部分群 (後の記号でいう $Z(R_3^O)$) に共役であり、しかもその正規化群は M_3 の部分群に共役である。従って、$R = Z(R_4^h)$ ならば、その正規化群 $N_G(R)$ は M_3 の部分群に共役となる。

一方、$R = R_4^p$ のときには $N_G(R_4^p) \leq M_4$ であることを確かめることが出来ます。(ここでは、R_4^p を共役に取りかえるのではなく、R_4^p の正規化群が本当に $M_4 = N_G(R_4)$ に含まれることに注意してください。) 従って、前節で注意したように R_4^p は群 G の根基 2-部分群となります。

以上の考察から、結局次が結論されました。

> $G = J_4$ の根基 2-部分群 R が $N_G(R) \leq M_4$ を満たせば, R をその適当な共役に取りかえれば、ある $i = 1, 2, 3$ に対して $N_G(R) \leq M_i$ であるか、または $R = R_4$ ないしは $R = R_4^p$ である。更に R_4 と R_4^p は実際に G の根基 2-部分群である。

Step 2. $N_G(R) \leq M_3$ **のとき**　この場合を扱うには、剰余群 $M_3/V_3 \cong M_{24}$ の $V_3 \cong 2^{11}$ への作用について知る必要があります。この作用は, マシュー群 M_{24} の偶剰余ゴーレイ符号への作用と同値であることが示されます。詳しいことは略しますが、偶剰余ゴーレイ符合 $\bar{\mathcal{G}}$ とは次のような対象です。まず、２４点集合 Ω の８点部分集合の族 $\mathcal{B}$ で、どんな５点部分集合に対しても、それを含むような $\mathcal{B}$ の元 B が唯一つ存在するようなものが構成できます。こうした族が２つあれば、その一方を Ω 上の適当な置換により他方に移すことができます。このような族を一つ固定して $\mathcal{B}$ と書き、その元である Ω の８点部分集合のそれぞれを**オクタッド**と呼びます。**２４次マシュー群** M_{24} とは、$\mathcal{B}$ を全体として保つ (つまりオクタッドをオクタッドに移す) ような Ω 上の置換の全体がなす、対称群 $S_\Omega \cong S_{24}$ の部分群です。集合 Ω の部分集合で大きさが偶数であるようなもの全体には、集合の対称和によって和が定義され、二元体上の $|\Omega| - 1 = 23$ 次元ベクトル空間とみなせます。このベクトル空間 $E(\Omega)$ の中で $\mathcal{B}$ によって生成される部分空間 $\mathcal{G} = \langle \mathcal{B} \rangle$ を**ゴーレイ符号**と呼び、それによる剰余空間 $E(\Omega)/\mathcal{G}$ を**偶剰余ゴーレイ符号**といいます。ゴーレイ符号は 12 次元で、従って偶剰余ゴーレイ符号は 11 次元であることが示されます。

ゴーレイ符号は具体的に書き出すことが可能で、その上従って偶剰余ゴーレイ符号へのマシュー群 M_{24} の元の作用もはっきりわかります。マシュー群 M_{24} 自身の根基 2-部分群の共役類は１３個あって、その代表元はゴーレイ符号への作用が見やすい形にはっきり書けます。ここでは意味を説明しませんが、これらの代表元はある４種類の記号 $O, T, S, \square$ からなる集合の次に示す１３個の部分集合 F によってインデックス付けて U_F の形に書けます。(これらの記号 $O, T, S, \square$ は前ステップにおいて登場した射影点 p・直線 l・平面 π・超平面 h 等に対応するものと思って下さい。)

$O, T, S, O\square, T\square, OT, OS, TS,$
$OTS, OT\square, OS\square, TS\square, OTS\square.$

M_3/V_3 と M_{24} を同一視したとき、 M_{24} の根基 2-部分群 U_F の M_3 における逆像を前ステップのように R_3^F と書くことにします。 また $R_3^{\emptyset} = V_3$ とします。

すると１４個の根基部分群の候補 R_3^F が得られたわけですが、これらの中心 $Z(R_3^F) = C_{V_3}(U_F)$ を計算していくと（この計算にはマシュー群の偶剰余ゴーレイ符号への作用に関する情報が必要です。）次のことがわかります。

(1) $F \ni S$ ならば $Z(R_3^F)$ は $2A$ 元で生成される位数 2 の群であり、従って R_3^F の共役の正規化群は M_1 に含まれる。

(2) $Z(R_3^{T\square}) = Z(R_3^{OT\square}) \cong 2^2$ であり、その正規化群 $N_G(Z(R_3^{T\square}))$ は前ステップで述べたように M_2 に含まれる。従って、$N_G(R_3^{T\square})$ 及び $N_G(R_3^{OT\square})$ の適当な共役は M_2 に含まれる。

(3) $Z(R_3^T) = Z(R_3^{OT}) \cong 2^3$ は $Z(V_2)$ に共役であり、正規化群 $N_G(R_3^T)$ 及び $N_G(R_3^{OT})$ は $N_G(Z(V_2) = M_2$ に含まれる。

(4) $Z(R_3^O) \cong 2^6$ であり、その正規化群 $N_G(Z(R_3^O))$ は前ステップで述べたように M_3 に含まれる。従って、$N_G(R_3^O) \leq N_G(Z(R_3^O)) \leq M_3$ であり、R_3^O は確かに G の根基 2-部分群である。

(5) $Z(R_3^{O\square}) \cong 2^3$ であり、その正規化群 $N_G(Z(R_3^{O\square}))$ は前ステップで述べたように M_3 に含まれる。従って、$N_G(R_3^{O\square}) \leq M_3$ であり、$R_3^{O\square}$ は確かに G の根基 2-部分群である。

以上の考察から、結局次が結論されました。

$G = J_4$ の根基 2-部分群 R が $N_G(R) \leq M_3$ を満たせば，R をその適当な共役に取りかえれば、ある $i = 1, 2$ に対して $N_G(R) \leq M_i$ であるか、または $R = R_3$, R_3^O ないしは $R_3^{O\square}$ である。更に R_3, R_3^O と $R_3^{O\square}$ は実際に G の根基 2-部分群である。

Step 3. $N_G(R) \leq M_2$ **のとき**　この場合には剰余群 M_2/V_2 が直積 $S_5 \times GL_3(2)$ に分解しているので補題 5 を有効に使うことが出来ます。$R \neq V_2$ であれば像 R/V_2 は $S_5 \times GL_3(2)$ の根基 2-部分群ですから、この補題により $R/V_2 = R_c/V_2 \times R_n/V_2$ と分解します。ここで R_c/V_2 は自明な部分群も許した S_5 の根基 2-部分群、R_n/V は自明な部分群も許した $GL_3(2)$ の根基 2-部分群です。

S_5 の位数は小さいので、その根基 2-部分群は直接にすぐ求められます。代表系は

$U_1 := \langle (12)(34), (13)(24) \rangle$, $U_2 := \langle (12)(34), (13)(24), (12) \rangle$
及び $U_3 := \langle (12) \rangle$

の3個です。前々節の例で見たように、$GL_3(2)$ の根基 2-部分群はユニポテント根基ですから、$GL_3(2)$ の自然な 3 次元の表現空間 $GF(2)^3$ の部分空間の列によってインデックス付けられます。前々ステップで見たように p を $GF(2)^3$ の射影点、l を p を含む $GF(2)^3$ の射影直線とすれば、$GL_3(2)$ の根基 2-部分群の3個の代表元は U_F $(F = p, l, pl)$ と書くことが出来ます。

さて $C_G(Z(V_2))/V_2 \cong S_5$ は $V_2/Z(V_2) \cong 2^{12}$ に自明ではない作用を引き起こすこと、また $M_2/C_G(Z(V_2)) \cong GL_3(2)$ の V_2 の中心 $Z(V_2) \cong 2^3$ への作用が自然なものであることが確かめられます。従って、R の中心 $Z(R)$ は $Z(V_2)$ に含まれ、

$$Z(R) = Z(V_2) \cap C_G(R_n/V_2)$$

となります。(R_c/V_2 は $Z(V_2)$ 上に自明に作用するので右辺には現れないことに注意してください。)そこで $M_2/C_G(V_2) \cong GL_3(2)$ の V_2 の中心 $Z(V_2) \cong 2^3$ への作用が自然なものであることに注意すると、$GL_3(2)$ の根基 2-部分群 R_c/V_2 が $F = p$ または pl に対する U_F に共役であれば(R_c/V_2 の如何によらず)、$C_{Z(V_2)}(U_F)$ は射影点からなり、それは $2A$ 元で生成される位数2の部分群です。従って、このときには $N_G(R)$ $(\leq N_G(Z(R)))$ は M_1 の共役に含まれます。

$F = l$ のときには $Z(R)$ は $Z(V_2)$ の射影直線であり、それは $Z(R_3^{T\square})$ と共役ですから、この場合には前パラグラフで注意したように $N_G(R) \leq N_G(Z(R)) \leq M_2$ となって、R は実際に G の根基部分群になります。また $R_c/V_2 = 1$ のときには $Z(R) = Z(R_2)$ ですから当然 $N_G(R) \leq N_G(Z(V_2)) = M_2$ であり、やはり G の根基部分群です。

以上の考察から、結局次が結論されました。

> $G = J_4$ の根基 2-部分群 R が $N_G(R) \leq M_2$ を満たせば, R をその適当な共役に取りかえれば、$N_G(R) \leq M_1$ であるか、または R は $M_2/V_2 \cong S_5 \times GL_3(2)$ の次の部分群の逆像である。(ここで記号は上のものに従う。)
>
> 1 (V_2 に対応します), U_1, U_2, U_3; U_l, $U_1 \times U_l$, $U_2 \times U_l$, $U_3 \times U_l$
>
> 更に後者の形の 8 個の群は実際に G の根基 2-部分群である。

すると最終的には $N_G(R) \leq M_1$ である場合に帰着されたわけですが、$V_1 = O_2(M_1)$ はエクストラスペシアル群なので、前節の補題 4 により $M_1/V_1 \cong 3M_{22}2$ の根基 2-部分群の逆像はすべて G の根基 2-部分群でもあります。群 $3M_{22}2$ の根基 2-部分群はやはり帰納的に求められます。実は 15 個の共役類があることがわかります。すると上のステップで得られた $2+3+8 = 13$ 個の根基群の共役類とあわせて、合計 28 個の根基 2-部分群の共役類が得られました。(これらが互いに共役ではないという事実は、その中心及び正規化群の構造を見るとわかります。)しかもこれらの根基部分群の正規化群の構造も上で見たように各極大 2-局所部分群の中ではっきり計算できています(それを一々書くのはここでは略します)。

定理 6 $G = J_4$ の根基 2-部分群は 28 個の共役類からなり、その各代表元の中心、正規化群の構造も決定された。

参考文献

[AF] J. L. Alperin and P. Fong, Weights for symmetric and general linear groups, *J. Algebra* **131** (1990), 2–22.

[An] J. An, Weight for the Chevalley groups $G_2(q)$, *Proc. London Math. Soc.* **69** (1994), 22–46.

[AS] M. Aschbacher and S. D. Smith, On Quillen's conjecture for the p-group complex, *Annals of Math.* **137** (1993), 473–529.

[At] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *Atlas of Finite Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[Be] D. Benson, *Representations and Cohomology II: Cohomology of groups and modules*, Cambridge studies in advanced mathematics **31**, Cambridge U. Press, Cambridge, 1991.

[Ja] Z. Janko, A new finite simple group of order 86.775.571.046.077.562.880 which posseses M_{24} and the full covering group of M_{22} as subgroups, *J. Algebra* **42** (1976), 564–596.

[KY] M. Kitazume and S. Yoshiara, The radical subgroups of the Fischer simple groups, preprint, April, 1999.

[RS] M. Ronan and S. D. Smith, 2-local geometries for some sporadic groups, *Proc. Symp. Pure Math.* **37** (1980), 283–289.

[Sa] M. Sawabe, 2-Radical subgroups of the Conway simple group $Co1$, *J. Algebra* **211**, 115-133.

[SY] S. D. Smith and S. Yoshiara, Some homotopy equivalences for sporadic geometries, *J. Algebra* **192** (1998), 326–379.

[Yo] S. Yoshiara, The Borel-Tits property for finite groups, *in* "Groups and Geometries, Siena, September 1996," (A. Pasini et al., Eds.), *Trends Math.* (1998), 237–249.

[Yo2] S. Yoshiara, Radical subgroups of the sporadic simple group of Suzuki, submitted for publication.

[Yo3] S. Yoshiara, The radical 2-subgroups of the sporadic simple groups J_4, $Co2$ and Th, preprint, March, 1999.

[Yo4] S. Yoshiara, The radical 2-subgroups of some sporadic simple groups, preprint, March, 1999.